**Исследование операция и теория игр.**

Основные понятия и определения исследования операций.

**Операцией** называется совокупность действий направленных на достижение некоторой цели.

Основным аппаратом в исследовании операций является **математическая модель**.

Составляющие математической модели:

1. Запас ресурсов
2. Неконтролируемые факторы, влияющие на ход операции (факторы, которыми нельзя распоряжаться)
3. Контролируемые факторы
4. Стратегия
5. Критерии эффективности (некоторая функция, которую необходимо максимизировать или минимизировать)

Неконтролируемые факторы делятся на 3 группы

1. Фиксированные (точно известные исследователю операции)
2. Случайные факторы
3. Неопределенные

Основные отделы исследования операций

1. Линейное программирование
2. Целочисленное программирование
3. Динамическое программирование
4. Теория игр

**Линейное программирование**

Общая задача линейного программирования состоит из:

1. Системы ограничений (#1)
2. Целевой функции (#2)
3. Решить задачу линейного программирования (ЗЛП) – указать такое значение переменных при которых целевая функция принимает минимальной или максимальное значение (такое решение называется оптимальным).

**Графический метод решения задач линейного программирования.**

Графическим методом могут быть решены задачи линейного программирования содержащие не более пяти переменных.

Найти наименьшее и наибольшее значение функции F(X)=(#4), при следующих ограничениях (#5).

Допустимая область решения задачи: (#6)

ABCD – область допустимых решений.

1. Построим допустимую область решений
2. Построим опорный вектор
3. Построим линию уровня L перпендикулярную опорному вектору
4. Перемещая линию уровня вдоль опорного вектора найдем точку максимума и точку минимум целевой функции (граничные точки допустимой области)

D – точка минимума

B – точка максимума

Возможны следующие случаи при решении задач линейного программирования:

1. Не существует области допустимых решений (система ограничений противоречива)
2. Не существует минимального или максимального значения
3. Линия уровня параллельна одной из граней области допустимых решений (вся грань является минимальной точкой)

**Решение графически ЗЛП более чем 2 переменных**

Найти наибольшее значение функции: (#7)

1. Выделяем базисные переменные (базисные переменные – это переменные, которые входят только в одно уравнение системы с коэффициентом равным единице)

**Виды задач линейного программирования**

Существует несколько видов задач линейного программирования:

1. Общая задача линейного программирования (система ограничений может содержать неравенства любого знака или уравнение, целевая функция может стремиться как к максимуму, так и к минимуму, на переменные не накладывается никаких ограничений.
2. Стандартная задача линейного программирования (если целевая функция принимает максимальное значение, то неравенства в системе ограничений имеют вид: #8)
3. Каноническая задача линейного программирования (#9) (всегда можно перейти от общей задачи линейного программирования к стандартной, а затем к канонической)

Все задачи ЛП считаются эквивалентными.

Для канонической задачи ЛП разработан универсальный метод решения, который получил название симплекс метода.

Привести к каноническому виду задачу: (#10)

Для решения задач ЛП в канонической форме на первом шаге выделяют базисные переменные, то есть это такие переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений, при чем с коэффициентом равным единице. Эти переменные всегда можно найти применяя к системе ограничений метод Гаусса. Желательно, чтобы такая система в качестве свободных членов содержала неотрицательные числа.

(#11)

Симплекс метод решения задачи ЛП

Пусть дана каноническая задача линейного программирования, каждое уравнение содержит базисную переменную и все свободные члены не отрицательны. Целевая функция должна принимать наибольшее значение.

1. Считая все свободные переменные равными нулю – получаем допустимое решение или первый опорный план для которого считаем значение целевой функции.
2. Основная идея симплекс метода заключается в последовательном переходе от одного базиса к другому так, чтобы новое значение целевой функции увеличивалось.
3. Этот переход происходит за счет удаления из базиса одной переменной и добавления другой.
4. Решение оформляется в виде симплекс таблиц.

(#12)

Заполнение симплекс-таблицы осуществляется по правилам ограничений. Строка соответствующая целевой функции заполняется по двум правилам:

1. Коэффициенты целевой функции умножаются на соответствующие значения свободных членов и прибавляются свободное слагаемое целевой функции. Во всех остальных случаях эти числа отнимаются. В результате получается первый опорный план и значение целевой функции.
2. Если в строке соответствующей целевой функции все числа положительные, то данный план является оптимальным.
3. Если в строке соответствующей целевой функции есть числа меньше нуля => решений нет.
4. Если в строке соответствующей целевой функции есть числа меньше нуля, а над ними есть коэффициенты больше нуля => тогда план допускает улучшения.

В строке для целевой функции есть числа меньше нуля, тогда рассматриваем над каждым таким числом столбики коэффициентов, если все числа в столбике меньше, либо равны нуля, решения нет.

Следующий шаг.

Для того, чтобы улучшить полученное решение определим, какая базисная переменная должна быть удалена. Выберем наименьшее среди отрицательных чисел и разделим свободные члены на соответствующие элементы выбранного столбца. Среди этих чисел выберем наименьшее. Эта базисная переменная и будет удалена.

(#13)

Выделенные строки и столбцы являются ключевыми и заполняются по следующему методу:

1. Все элементы ключевой строки делятся на ключевой элемент (пересечение)
2. Все остальные клетки, кроме строки целевой функции, заполняются по правилу прямоугольника

Для производства 4-х видов изделий используется 3 вида сырья. Данные приведены в таблице. Составить производственный план таким образом, чтобы получаемая прибыль была наибольшей.

Если требуется найти решение канонической задачи линейного программирования в случае, когда целевая функция должна принимать наименьшее значение, то точно так же используется симплекс метод, если в целевой функции значения всех коэффициентов поменять на противоположные.

**Решить следующую задачу линейного программирования.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Базисные переменные | Свободные члены  0 | 2 | 4 | 0 | 0 |  |
| 0 |  | 5 | 4 | 2 | 1 | 0 | 2.5 |
| 0 |  | 4 | 1 | 1 | 0 | 1 | 4 |
|  | F | 0 | -2 | -4 | 0 | 0 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Базисные переменные | Свободные члены  0 | -2 | -4 | 0 | 0 |  |
|  |  | 2.5 | 0.5 | 1 | 0.5 | 0 |  |
|  |  | 1.5 | 0.5 | 0 | -0.5 | 1 |  |
|  | F | 10 | 0 | 0 | 2 | 0 |  |

X = (0;2.5)

**Решение задач методом искусственного базиса:**

Если задача приведена к каноническому виду, но не в каждом уравнении выделены базисные переменные. В этом случае, в каждое уравнение системы, не содержащее базисную переменную, добавляют искусственным образом переменную Y с коэффициентом 1, а в целевую функцию эту же функцию вводят с коэффициентом N считая это число ОЧЕНЬ большим. А дальше для решения применяется стандартный симплекс метод.

Так как базисная переменная присутствует только в первом уравнении, то решим эту задачу методом искусственного базиса вводя неотрицательную переменную во второе уравнение.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Баз. Пер. | Свободные  0 | 1 | -2 | 1 | 1 | M |  |
| 1 |  | 8 | 1 | -3 | 1 | -1 | 0 |  |
| M |  | 3 | 0 | 4 | 1 | -2 | 1 |  |
|  | F | 8-3M | 0 | -1-4M | -M | 2M-2 | 0 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Баз. Пер. | Свободные  0 | 1 | -2 | 1 | 1 | M |  |
| 1 |  | 41/4 | 1 | 0 | 7/4 | -5/2 | 3/4 |  |
| -2 |  | 3/4 | 0 | 1 | 1/4 | -1/2 | 1/4 |  |
|  | F | 35/4 | 0 | 0 | 1/4 | -5/2 | 1/4+M |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Баз.Пер. | Свободные | 2 | -1 | 2 | -2 | -M | -M |  |
| -2 |  | 2 | -1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |  |
| -M |  | 1 | 1 | -2 | 1 | 0 | 1 | 0 |  |
| -M |  | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |  |
|  | F | -4-3M | -3M | -1+M | -4-M | 0 | 0 | 0 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Баз.Пер. | Свободные | 2 | -1 | 2 | -2 | -M | -M |  |
| -2 |  | 3 | 0 | 3/2 | 1 | 1 | 0 | 1/2 |  |
| -M |  | 0 | 0 | -5/2 | 1 | 0 | 1 | -1/2 |  |
| 2 |  | 1 | 1 | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 1/2 |  |
|  | F | -4 | 0 | -1+5/2M | -4-M | 0 | 0 | 3/2M |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Баз.Пер. | Свободные | 2 | -1 | 2 | -2 | -M | -M |  |
| -2 |  | 3 | 0 | 4 | 0 | 1 | -1 | 1 |  |
| -2 |  | 0 | 0 | -5/2 | 1 | 0 | 1 | -1/2 |  |
| 2 |  | 1 | 1 | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 1/2 |  |
|  |  | -4 | 0 | -11 | 0 | 0 | 4+M | M-2 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Баз.Пер. | Свободные | 2 | -1 | 2 | -2 | -M | -M |  |
| -1 |  | 3/4 | 0 | 1 | 0 | 1/4 | -1/4 | 1/4 |  |
| 2 |  | 15/8 | 0 | 0 | 1 | 5/8 |  |  |  |
| 2 |  | -5/8 | 1 | 0 | 0 | -1/8 |  |  |  |
|  |  | 17/4 | 0 | 0 | 0 | 2 |  |  |  |

Ответ:

**Двойственные задачи линейного программирования**

В линейном программировании рассматривают пару задач связанных между собой симметричными зависимостями. Эти задачи называются двойственными, если они удовлетворяют следующим условиям:

1. В системе ограничений первой задачи n – неизвестных, m – неравенств. Во второй задаче наоборот.
2. Матрицы ограничений транспонированы относительно друг друга.
3. Правые части системы ограничений первой задачи являются коэффициентами целевой функции во второй.

Составить задачу двойственную данной.

Пара симметрично-двойственных задач одновременно, либо имеет решение, либо нет. При этом значение целевых функций совпадают, и значит решение одной задачи можно свести к решению другой, двойственной ей.

Если система ограничений задачи ЛП не является канонической, то можно построить для неё двойственную задачу, которая не является симметричной и при этом, находя её решение, можно найти решение первой задачи.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Баз. Пер. | Свободные. | 6 | -3 | 1 | -M | -M | -M |  |
| -M |  | 10 | 2 | -7 | 5 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| -M |  | 5 | 2 | -1 | -2 | 0 | 1 | 0 | 2.5 |
| -M |  | 4 | 2 | 1 | -4 | 0 | 0 | 1 | 2 |
|  |  | -19M | -6M-6 | 7M+3 | M-1 | 0 | 0 | 0 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Баз. Пер. | Свободные. | 6 | -3 | 1 | -M | -M | -M |  |
| -M |  | 6 | 0 | -8 | 9 | 1 | 0 | -1 | 2/3 |
| -M |  | 1 | 0 | -2 | 2 | 0 | 1 | -1 | 1/2 |
| 6 |  | 2 | 1 | 1/2 | -2 | 0 | 0 | 1/2 |  |
|  | F | -7M+12 | 0 | 10M+6 | -11M-13 | 0 | 0 | 3M+6 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Баз. Пер. | Свободные. | 6 | -3 | 1 | -M | -M | -M |  |
| -M |  | 3/2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 9/2 | 7/2 | 3/2 |
| 1 |  | 1/2 | 0 | -1 | 1 | 0 | 1/2 | -1/2 |  |
| 6 |  | 3 | 1 | -3/2 | 0 | 0 |  |  |  |
|  | F | -3/2M +37/2 | 0 | -M-7 | 0 | 0 |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Баз. Пер. | Свободные. | 6 | -3 | 1 | -M | -M | -M |  |
| -3 |  | 3/2 | 0 | 1 | 0 |  |  |  |  |
| 1 |  | 2 | 0 | 0 | 1 |  |  |  |  |
| 6 |  | 21/4 | 1 | 0 | 0 |  |  |  |  |
|  |  | 29 | 0 | 0 | 0 |  |  |  |  |

F=29

Для задачи ЛП составить двойственную и решить одну из них и получить ответы для обоих.

Решим второе уравнение симплекс методом.

Решим данную задачу используя метод искусственного базиса.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Баз | Своб | -5 | 1 | -10 | 0 | 0 | -M |  |
|  | 5 | -2 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|  | 8 | 1 | 1 | 3 | 0 | -1 | 1 | 1 |
| G | -8M | -M+5 | -M-1 | -3M+10 | 0 | M | 0 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Баз | Своб | -5 | 1 | -10 | 0 | 0 | -M |  |
|  | 23/3 | -5/3 | 4/3 | 0 | 1 | -1/3 | 1/3 | 23/4 |
|  | 8/3 | 1/3 | 1/3 | 1 | 0 | -1/3 | -1/3 | 8 |
| G | -80/3 | 5/3 | -13/3 | 0 | 0 | 10/3 | M-10/3 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Баз | Своб | -5 | 1 | -10 | 0 | 0 | -M |  |
|  | 23/4 | -5/4 | 1 | 0 | 3/4 | -1/4 | 1/4 |  |
|  | 3/4 | 3/4 | 0 | 1 | -1/4 | -1/4 | 1/4 |  |
| G | -7/4 | -15/4 | 0 | 0 | 13/4 | 9/4 | M-9/4 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Баз | Своб | -5 | 1 | -10 | 0 | 0 | -M |  |
|  | 7 | 0 | 1 | 5/3 | 1/3 | -2/3 | 2/3 |  |
|  | 1 | 1 | 0 | 4/3 | -1/3 | -1/3 | 1/3 |  |
| G | 2 | 0 | 0 | 5 | 0 | 1 | M-1 |  |

Для второй задачи дополнительными переменными являются и , соответственно в первой задаче им соответствуют основные переменные.

**Несимметричные двойственные задачи.**

Если система ограничение помимо неравенств содержит и уравнения, то для неё аналогичным образом строится двойственная задача по следующему правилу:

Решая не симметричную двойственную задачу применяют тот же самый симплекс метод.

**Транспортная задача.**

Под транспортной задачей понимают задачу распределения грузов имеющихся у поставщиков между потребителями таким образом, чтобы суммарные транспортные расходы были минимальны.

Нужно составить план перевозки таким образом, чтобы суммарные расходы на перевозку товаров были минимальны.

1. Открытая ()
2. Закрытая

Чтобы свести задачу к закрытой – добавляют либо фиктивного поставщика, либо фиктивного потребителя, считая стоимость перевозки одной единицы товара равной нулю.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| / | 20 | 10 | 30 | 15 |
| 25 | 9(20) | 4(5) | 7 | 0 |
| 15 | 5 | 3(5) | 6(10) | 0 |
| 35 | 6 | 5 | 8(20) | 0(15) |

1. Задача открытая
2. Добавляем потребителя
3. Составим первый опорный план (итерационный план Фогеля/метод северо-западного угла)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| / | 20 | 10 | 30 | 15 |
| 25 | 9(-) | 4(-) | 7(25) | 0(-) |
| 15 | 5(5) | 3(10) | 6(-) | 0(-) |
| 35 | 6(15) | 5(-) | 8(5) | 0(15) |

1. Полученный план перевозок проверяют на вырожденность

В противном случае – количество недостающих клеток получают из свободных, заполняя их нулями и считая занятыми.

1. Оценим оптимальность данного плана методом потенциалов (для этого рассчитаем потенциалы занятых клеток)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| / | 20 | 10 | 30 | 15 |
| 25 | 9(-) | 4(-) | 7(25) | 0(-) |
| 15 | 5(5) | 3(10) | 6(+) | 0(-) |
| 35 | 6(15) | 5(-) | 8(5) | 0(15) |
|  |  |  |  |  |

Оценим потенциалы свободных клеток:

Данный план не является оптимальным (есть плохие клетки)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| / | 20 | 10 | 30 | 15 |
| 25 | 9(-) | 4(-) | 7(25) | 0(-) |
| 15 | 5(-) | 3(10) | 6(5) | 0(-) |
| 35 | 6(20) | 5(-) | 8(-) | 0(15) |
|  |  |  |  |  |

План вырожденный. Клетку плана 2-1 считаем занятой. Вычислим потенциал занятых клеток.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| / | 20 | 10 | 30 |
| 25 |  |  | 25 |
| 15 |  | 10 | 5 |
| 35 | 20 |  |  |

**Применение методов линейного программирования к решению матричных игр**

Под игрой в математике понимают любую конфликтную ситуацию. Среди всех видов игр наиболее хорошо разработан математический аппарат для решения матричных игр с нулевой суммой. Например “камень-ножницы-бумага”.

Участниками данной игры являются 2 лица, условия распределения выигрыша таковы, что выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. Последовательность действий каждого игрока называется стратегией. Элементами матрица являются суммы выигрыша первого игрока. Эта матрица называется платежной.

**Стратегия игрока** – стратегией первого игрока называется вектор , где каждое – вероятность выбора действия игроком, , .

Элементы платежной матрицы - указывают выигрыш первого игрока при условии, что он выбрал действие, а второй игрок – действие. При таком выборе математическое ожидание выигрыша первого игрока:

если каждая из вероятностей принимает значение 0 или 1 – то такая стратегия игрока называется чистой стратегией, в противном случае – смешанным.

**Решить матричную игру** – значит указать оптимальные стратегии соответствующих игроков.

Оптимальные стратегии игроков обозначаются и .

где - цена игры и равна .

**Теорема Фон Неймана** – любая матричная игра имеет оптимальные стратегии, т.е. имеет решение.

**Решение матричной игры в чистых стратегиях.**

Пусть дана матричная игра с помощью платежной матрицы:

– нижняя цена игры, получается при выборе наименьших значений в каждой из строк и их максимального значения.

- верхняя цена игры, в каждом столбце выбирается максимум, а из них выбирается минимум.

1. , седловая точка, игра имеет решение в чистых значениях, цена игры равна значению седловой точки.
2. , игра имеет решение в смешанных значениях.

делаем вывод о том, что => , получается выигрыш равен 2.

**Решение игры в смешанных стратегиях.**

Из платежной матрицы удаляют доминируемые (поменьше) строки и доминирующие столбцы.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| -4 | 0 | 3 | 4 |
| 2 | -3 | 1 | 2 |
| -1 | 1 | 3 | 6 |

Делаем вывод, что седловой точки нет, а значит решения в чистых стратегиях не существует.

|  |  |
| --- | --- |
| 2 | -3 |
| -1 | 1 |

|  |  |
| --- | --- |
| 5 | 0 |
| 2 | 4 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| -4 | 0 | 3 | -3 | 4 |
| 2 | -3 | 1 | 4 | 2 |
| -1 | 1 | 3 | -2 | 6 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 2 | -3 | 4 |
| -1 | 1 | -2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 5 | 0 | 7 |
| 2 | 4 | 1 |

Первая задача максимизации, все свободные коэффициенты и коэффициенты равны единице.

Решим первую задачу линейного программирования

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |